SPISAK AKSIOMA

Euklidska geometrija

I Aksiome incidencije (pripadanja)

I_1 Za svake dve tačke A i B postoji prava a koja je incidentna i sa tačkom A i sa tačkom B.

I_2 Za svake dve tačke A i B postoji najviše jedna prava koja je incidentna sa svakom od tačaka A i B.

I_3 Za svaku pravu postoje bar dve tačke koje su sa njom incidentne. Postoje bar tri tačke koje nisu incidentne sa istom pravom.

I_4 Za svake tri tačke A, B, C koje nisu incidentne sa istom pravom, postoji ravan koja je incidentna sa svakom od tačaka A, B, C.

Svakoj ravni je incidentna bar jedna tačka.

I_5 Za svake tri tačke A, B, C koje nisu incidentne sa istom pravom, postoji najviše jedna ravan koja je incidentna sa svakom od tih tačaka.

I_6 Ako su dve tačke prave a incidentne sa ravni α, tada je svaka tačka prave a incidentna sa ravni α.

I_7 Ako postoji jedna tačka koja je incidentna i sa ravni α i sa ravni β, tada postoji bar još jedna tačka koja je incidentna i sa ravni α i sa ravni β.

I_8 Postoje bar četiri tačke koje nisu incidentne sa istom ravni.

II Aksiome poretka

II_1 Ako je $(A-B-C)$, tada su A, B i C tri različite tačke jedne iste prave i takođe je $(C-B-A)$.

II_2 Za svake dve tačke A i B postoji tačka C, takva da je $(A-B-C)$.

II_3 Ako su A, B i C tri tačke jedne prave, tada važi najviše jedna od relacija: $(A - B - C)$, $(B - C - A)$, $(C - A - B)$.

II_4 (**Pašova aksioma**) Neka su A, B, C tri nekolinearne tačke i neka je p prava koja je incidentna sa ravni ABC i nije incidentna ni sa jednom od tačaka A, B, C. Ako važi relacija $(A - p - B)$, tada važi bar jedna od relacija $(B - p - C)$ i $(C - p - A)$.

III Aksiome podudarnosti

III_1 Za svaku polupravu a' sa početnom tačkom A' i svaku duž AB, postoji tačka $B' \in a'$, takva da je duž AB podudarna sa duži $A'B'$, $[AB] \cong [A'B']$.

III_2 Ako je $[A'B'] \cong [AB]$ i $[A''B''] \cong [AB]$, tada je $[A'B'] \cong [A''B'']$.

III_3 Ako je $(A-B-C)$ i $(A'-B'-C')$ i ako je $[AB] \cong [A'B']$ i $[BC] \cong [B'C']$, tada je $[AC] \cong [A'C']$.

III_4 Za svaku poluravan α' sa ivicom p', za svaku polupravu $a' \subset p'$ sa početnom tačkom O', za svaki ugao ab, postoji jedna i samo jedna poluprava $b' \subset a'$ sa početnom tačkom O', takva da je ugao ab podudaran sa uglom $a'b'$, $\angle ab \cong \angle a'b'$.

Svaki ugao je podudaran samom sebi.

III_5 Ako za trouglove ABC i $A'B'C'$ važi da je $[AB] \cong [A'B']$, $[AC] \cong [A'C']$, $\angle BAC \cong \angle B'A'C'$, tada je i $\angle CBA \cong \angle C'B'A'$.

IV Aksiome neprekidnosti

IV_1 (**Arhimedova aksioma**) Neka su AB i CD proizvoljne duži. Neka su tačke $A_1, A_2, A_3, \ldots$ incidentne sa polupravom AB, tako da je

$$(A - A_1 - A_2), (A_1 - A_2 - A_3), (A_2 A_3 A_4), \ldots,$$

$$[AA_1] \cong [A_1A_2] \cong [A_2A_3] \cong \ldots \cong [CD].$$

Tada postoji ceo pozitivan broj n, takav da je $(A_1 - B - A_n)$.

IV_2 (**Kantorova aksioma**) Neka je dat beskonačan niz duži, takvih da je svaka duž sadržana u prethodnoj i ne postoji duž sadržana u svim dužima niza. Tada postoji tačka koja je sadržana u svim dužima toga niza.

V Aksioma paralelnosti

V_E Za svaku pravu a i svaku tačku A koja nije incidentna sa pravom a, postoji u ravni aA jedna i samo jedna prava koja je incidentna sa tačkom A i ne seče pravu a.

Hiperbolična geometrija (Geometrija Lobačevskog)

U hiperboličnoj geometriji su aksiome incidencije, poretka, podudarnosti i neprekidnosti iste kao u Euklidskoj geometriji. Razlika je jedino u aksiomi paralelnosti.

V_L (**Aksioma Lobačevskog**) Za svaku pravu a i svaku tačku A koja nije incidentna sa pravom a, postoje u ravni aA bar dve prave koje su incidentne sa tačkom A i ne seku pravu a.

Podudarnost trouglova

Urađeni zadaci

1. Naći zbir $\alpha + \beta + \gamma + \delta + \eta$ uglova u tjemenima "petokrake zvijezde". (Zvijezda je nacrtan slobodno).

2. U trouglu je jedna stranica podudarna dvostruko odgovarajućoj visini. Dokazati da ugao naspram te stranice ne može da bude tup.

3. Neka je AB najmanja stranica trougla $\triangle ABC$ i M proizvoljna tačka u unutrašnjosti trougla. Dokazati da je $MA + MB + MC < AC + BC$.

4. Ako sva tri tjemena trougla $\triangle A_1B_1C_1$ pripadaju unutrašnjosti $\triangle ABC$, tada je obim $\triangle A_1B_1C_1$ manji od obima trougla $\triangle ABC$. Dokazati.

5. Jedan ugao trougla dva puta je veći od drugog, dok težišna linija iz tjemena trećeg ugla dijeli taj ugao na dva dijela od kojih je jedan dva puta veći od drugog. Naći uglove trougla.

6. Dokazati da se simetrale stranica trougla sijeku u jednoj tački S (S je centar opisane kružnice trougla).

7. Neka je $\triangle ABC$ oštrougli trougao sa centrom opisane kružnice u tački S. Tačka $P \in BC$ je ortogonalna projekcija tačke A. Pretpostavimo da je $\measuredangle BCA \geq \measuredangle ABC + 30°$. Dokazati da je $\measuredangle CAB + \measuredangle CSP < 90°$.

8. Na bočnim stranicama AC i BC jednakokrakog trougla $\triangle ABC$ date su tačke M i N redom, tako da je $CM + CN \cong AC$ (M i N nisu sredine stranica). Dokazati da je prava određena sredinama bočnih stranica trougla incidentna sa sredinom duži MN.

9. Kroz tačku M-sredinu osnovice AB jednakokrakog trougla $\triangle ABC$ prolazi prava koja siječe prave $p(A, C)$ i $p(B, C)$ u tačkama P i Q redom, tako da je $(P - M - Q)$. Dokazati da je $PQ > AB$.

10. Dokazati da se visine trougla sijeku u jednoj tački H (H zovemo ortocentar trougla).

11. Unutar $\triangle ABC$ uzeta je tačka M takva da je $\measuredangle MBA = 30°$, $\measuredangle MAB = 10°$. Odrediti ugao $\measuredangle AMC$, ako je $\measuredangle ACB = 80°$ i $AC \cong BC$.

12. Odrediti uglove trougla kod kojeg je centar opisane kružnice simetričan centru upisane kružnice u odnosu na jednu od njegovih stranica.

13. U unutrašnjosti kvadrata $\square ABCD$ data je tačka E takva da je $\triangle CDE$ jednakokraki sa uglovima kod C i D od $15°$. Dokazati da je $\triangle ABE$ jednakostraničan.

14. Duž koja spaja sredine dvije susjedne stranice trougla se zove srednja linija trougla. Neka su P i Q redom sredine stranica AB i AC trougla $\triangle ABC$. Dokazati da je $PQ = \frac{1}{2}BC$ i da je $p(P, Q) || p(B, C)$.

15. Iz jednog tjemena oštrouglog trougla konstruisana je visina, iz drugog simetrala ugla a iz trećeg težišna duž. Dokazati da trougao kojeg obrazuju njihove presječne tačke ne može biti jednakostraničan.

16. Dijagonala AC konveksnog četverougla $\square ABCD$ polovi njegov obim, a njena sredina pripada dijagonali BD. Dokazati da je $AB \cong CD$ i $AD \cong BC$.

17. U konveksnom četverouglu $\square ABCD$ rastojanja tjemena A i B od tjemena CD su podudarna, a pored toga je $AC + CB \cong AD + DB$. Dokazati da je $AD \cong BC$ i $AC \cong BD$.

18. Dokazati da većoj visini odgovara manja stranica i obrnuto.

19. Kroz tačku M koja leži na osnovici AB jednakokrakog $\triangle ABC$ prolazi prava koja siječe prave $p(A,C)$ i $p(B,C)$ u tačkama P i Q redom, tako da je M sredina duži PQ. Dokazati da je $AP \cong BQ$.

20. U trouglu $\triangle ABC$ je upisana kružnica sa centrom u I. Dokazati da se centar opisane kružnice oko trougla $\triangle BCI$ nalazi na presjeku poluprave $pp[A,I)$ i kružnice koja je opisana oko trougla $\triangle ABC$.

21. Neka je I centar upisane kružnice trougla $\triangle ABC$. U unutrašnjosti $\triangle ABC$ data je tačka P takva da je $\measuredangle PBA + \measuredangle PCA = \measuredangle PBC + \measuredangle PCB$. Dokazati da je $AP \geq AI$, te da jednakost vrijedi ako i samo ako se tačka P podudara sa tačkom I.

Zadaci za vježbu

22. Dokazati da je ugao koji obrazuju visina i težišna linija koje odgovaraju hipotenuzi pravouglog trougla jednak razlici oštrih uglova toga trougla.

23. Koje veličine mogu da budu uglovi α, β, γ trougla $\triangle ABC$, ako je $\alpha \geq \beta \geq \gamma$.

24. Data je kružnica $k(O,r)$ i tačka M. C je proizvoljna tačka kružnice $k(O,r)$, a A i B su tačke u kojima prava MO siječe kružnicu $k(O,r)$. Dokazati da je $MA \leq MC \leq MB$ ili $MB \leq MC \leq MA$.

25. Centri upisane i opisane kružnice trougla se poklapaju. Dokazati da je taj trougao jednakostraničan.

26. Dokazati da je ugao trougla:
(a) oštar ako i samo ako je naspremna stranica manja od dvostruke težišne linije koja joj odgovara;
(b) prav ako i samo ako je naspremna stranica podudarna dvostrukoj težišnoj liniji koja joj odgovara;
(c) tup ako i samo ako je naspremna stranica veća od dvostruke težišne linije koja joj odgovara.

27. Koja stranica raznostranog trougla je najbliža:
(a) centru opisane kružnice;
(b) ortocentru;
(c) težištu?
(Odgovore obrazložiti.)

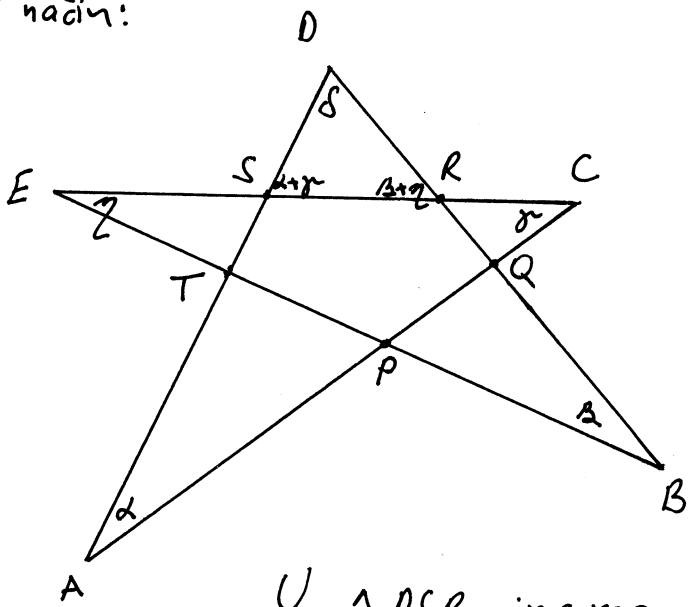
28. Koja tjeme raznostranog trougla je najbliža:
(a) ortocentru;
(b) centru upisane kružnice
(c) težištu?
(Odgovore obrazložiti.)

29. U unutrašnjosti konveksnog četverougla naći tačku za koju je zbir rastojanja do tjemena četverougla minimalan.

30. Naći tačku S za koju je zbir rastojanja do četiri tačke iste ravni minimalan.

Naći zbir $\alpha+\beta+\gamma+\delta+\eta$ uglova u tjemenima "petokrake zvijezde". (Zvijezda je nacrtana slobodno).

Rj. I način:



$\measuredangle DSR$ je vanjski ugao trougla $\triangle ACS$

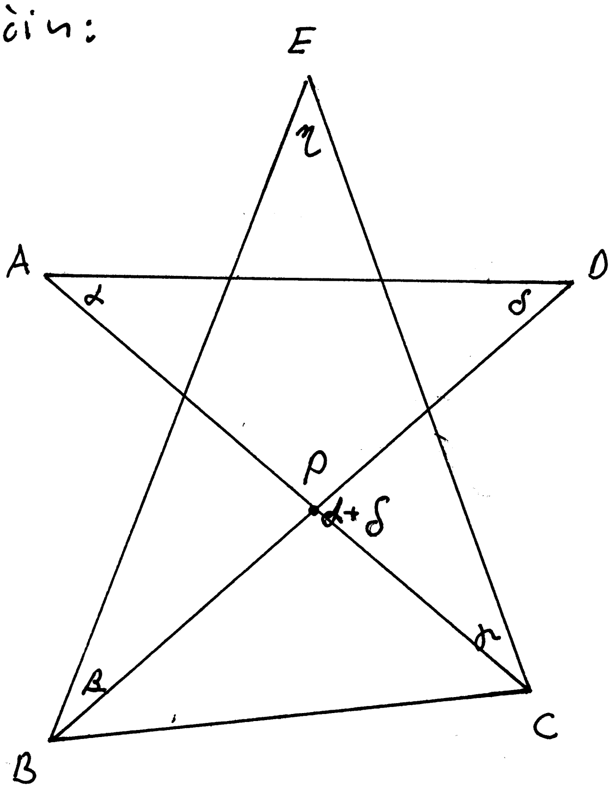
$\Rightarrow \measuredangle DSR = \alpha+\gamma$

$\measuredangle DRS$ je vanjski ugao $\triangle EBR$

$\Rightarrow \measuredangle DRS = \beta+\eta$

U $\triangle DSR$ imamo $\alpha+\beta+\gamma+\delta+\eta = 180^\circ$

II način:



$\measuredangle DPC$ je vanjski ugao $\triangle APD$

pa je $\measuredangle DPC = \alpha+\delta$.

$\measuredangle DPC$ je ujedno i vanjski ugao $\triangle PBC$

pa je $\measuredangle PBC + \measuredangle PCB = \alpha+\delta$

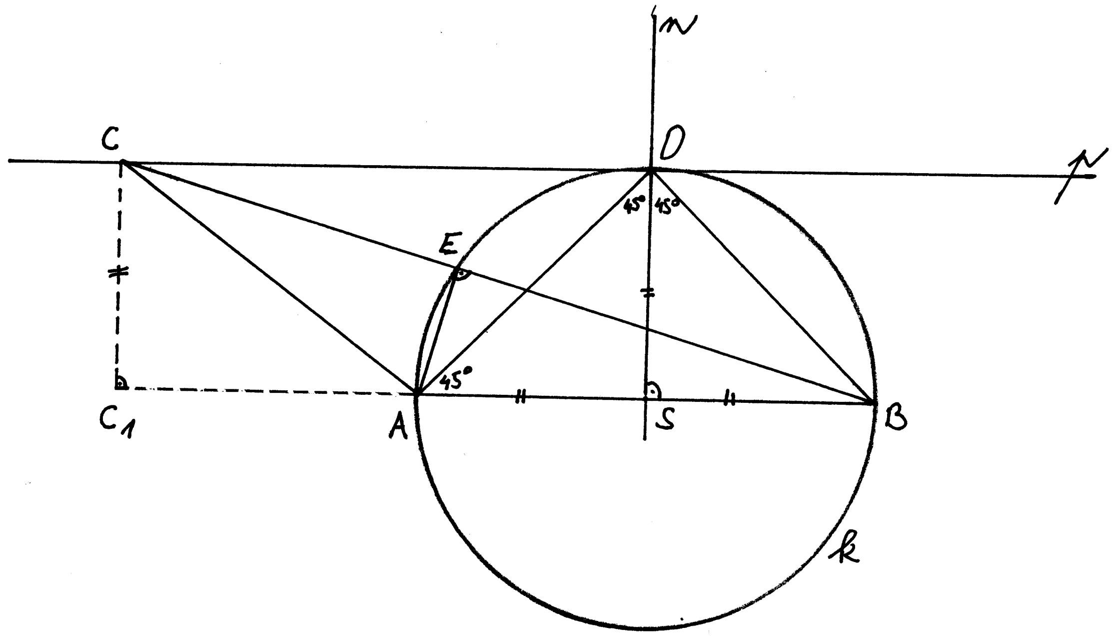
Sad imamo

$$\beta + \measuredangle PBC + \measuredangle PCB + \gamma + \eta = 180^\circ \quad \text{tj.}$$

$$\alpha+\beta+\gamma+\delta+\eta = 180^\circ.$$

U trouglu je jedna stranica podudarna dvostruko odgovarajućoj visini. Dokazati da ugao naspram te stranice ne može da bude tup.

Rj.



Neka je dat ΔABC takav da je $AB = 2CC_1$ gdje je CC_1 visina spuštena iz vrha C. Treba dokazati da $\measuredangle ACB$ nije tup.
Sa S označimo sredinu stranice AB i kroz tačku C povucimo pravu $p \parallel p(A,B)$. Neka je $n \perp p(A,B)$ i $S \in n$.

$\{D\} = p \cap n$

Kako je $p(C_1,S) \parallel p(C,D)$ i $p(C,C_1) \parallel p(D,S)$ $\Rightarrow$ $\square C_1SDC$ paralelogram
$\Rightarrow CC_1 \cong DS$

Primjetimo, kako je S sredina stranice AB, da $AS \cong BS \cong CC_1 \cong DS$.
Neka je k kružnica sa centrom u S poluprečnika AS.
Tad, kružnica k je opisana oko ΔABD, i ima tangentu p u tački D.
Moguća su dva slučaja:

1° $D \equiv C$

Tad $\measuredangle ACB = 90^\circ \Rightarrow \measuredangle ACB$ nije tup
q.e.d.

2° $D \not\equiv C$, kako je $C \in p$,
Tad, tačka C pripada vanjskom dijelu kružnice $k(S, AS)$.
Pretpostavimo da je $C \in pr[n, A)$. $\{E\} = BC \cap k$.
Ugao $\measuredangle AEB$ je nad prečnikom $\Rightarrow \measuredangle AEB = 90^\circ$ vanjski ugao $\Delta ACE \Rightarrow \measuredangle ACB$ nije tup
q.e.d.

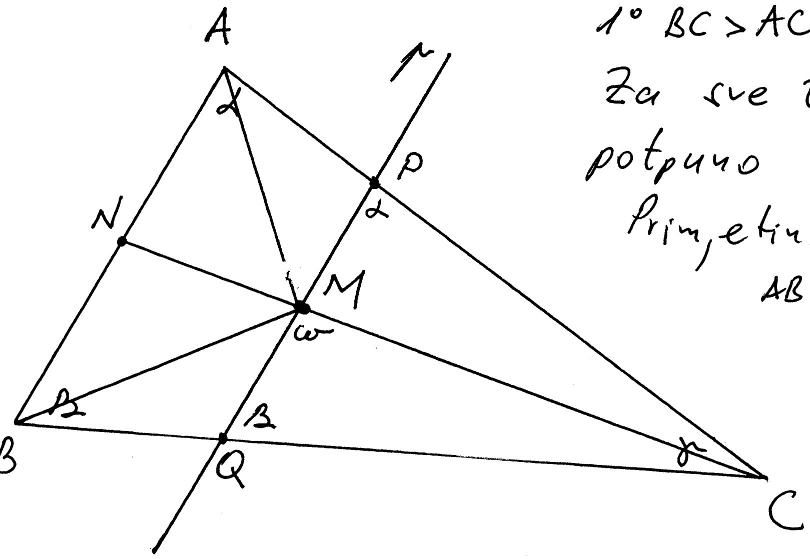
(#) Neka je AB najmanja stranica trougla ΔABC i M proizvoljna tačka u unutrašnjosti trougla ΔABC. Dokazati da je $MA+MB+MC < AC+BC$.

Rj:

postavka zadatka

$$\left.\begin{array}{l} \Delta ABC \\ AB \text{ najmanja stranica} \\ M \text{ proizvoljna tačka u} \\ \quad \text{unutrašnjosti trougla} \end{array}\right\} \Longrightarrow MA+MB+MC < AC+BC$$

Prema pretpostavci u ΔABC najmanja stranica je AB. Za stranice AC i BC je moguć jedan od sljedeća tri slučaja



1° $BC > AC$ $\quad 2^\circ$ $BC \cong AC$ $\quad$ i 3° $BC < AC$

Za sve tri slučaja rješenje je potpuno isto, pa neka je $BC > AC$.

Primjetimo sad da imamo

$$AB < AC < BC \implies \gamma < \beta < \alpha.$$

Dalje, neka je M proizvoljna tačka u unutrašnjosti trougla.

Kroz tačku M konstruišimo pravu p t.d. $p \parallel p(A,B)$.

$p \cap AC = \{P\}$ i $p \cap BC = Q$

$p(P,Q) \parallel p(A,B)$ i $p(C,A)$ transferzala $\implies \measuredangle CAB \cong \measuredangle CPQ = \alpha$

$p(P,Q) \parallel p(A,B)$ i $p(B,C)$ transferzala $\implies \measuredangle CBA \cong \measuredangle CQP = \beta$

Ugao $\measuredangle CMQ = \omega$ je vanjski ugao ΔCPM pa je $\omega > \alpha$.

Kako je $\alpha > \beta$ to je $\omega > \beta \xRightarrow{\Delta QCM} QC > MC$

Dalje $\left.\begin{array}{l} MB < BQ+MQ \\ AM < AP+MP \end{array}\right\} + \implies MB+MA < BQ+AP+\underbrace{PM+MQ}_{=PQ}$

$$MA+MB < BQ+AP+PQ \overset{\text{ZAŠTO}}{<} BQ+AP+PC$$

Konačno imamo

$$\left.\begin{array}{l} MC < QC \\ MA+MB < BQ+AP+PC \end{array}\right\} \overset{+}{\Longrightarrow} MA+MB+MC < AC+BC$$

q.e.d.

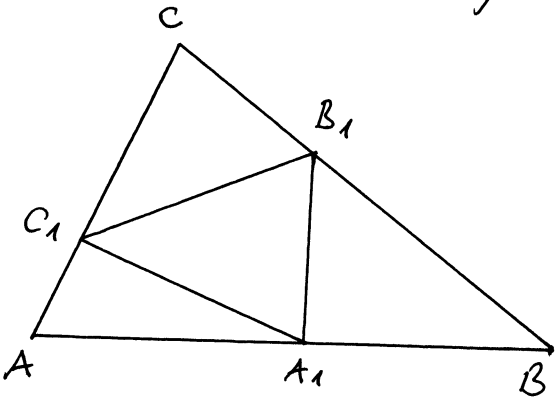
(#) Ako sva tri tjemena trougla $\Delta A_1B_1C_1$ pripadaju unutrašnjosti ΔABC, tada je obim $\Delta A_1B_1C_1$ manji od obima trougla ΔABC. Dokazati.

Rj: postavka zadatka

$$\left.\begin{array}{l} \Delta ABC \\ A_1,\ B_1,\ C_1 \in \text{unutrašnjosti } \Delta ABC \end{array}\right\} \Rightarrow O_{\Delta A_1B_1C_1} < O_{\Delta ABC}.$$

Prije nego što počnemo rješavati naš zadatak razmotrimo dva specijalna slučaja ovog zadatka:

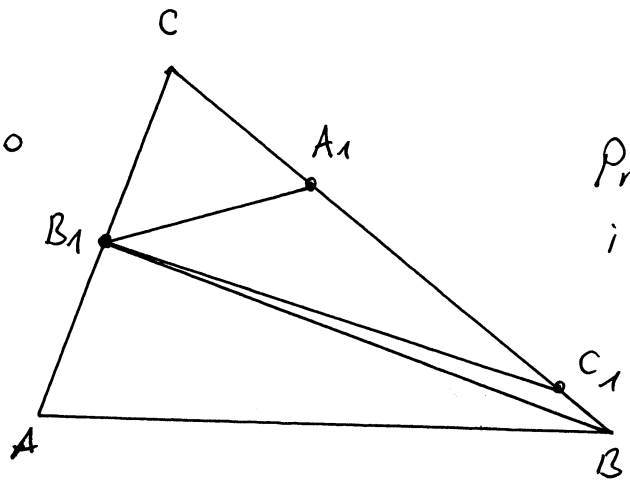
1°



Pretpostavimo da tjemena $\Delta A_1B_1C_1$ leže na stranicama trougla i to $A_1 \in AB$, $B_1 \in BC$ i $C_1 \in AC$. Posmatrajmo ΔA_1BB_1, ΔC_1B_1C i ΔAA_1C. Imamo

$$\begin{array}{rl} & A_1B_1 < A_1B + BB_1 \\ & B_1C_1 < CC_1 + CB_1 \\ + & A_1C_1 < AA_1 + AC_1 \\ \hline & O_{\Delta A_1B_1C_1} < O_{\Delta ABC} \end{array}$$

2°



Pretpostavimo da $A_1, C_1 \in BC$ i $B_1 \in AC$ i pokažimo da $O_{\Delta A_1B_1C_1} < O_{\Delta ABC}$.

$$\begin{array}{rl} & A_1B = A_1B \\ & A_1B_1 < B_1C + CA_1 \\ + & B_1B < AB_1 + AB \\ \hline & O_{\Delta A_1B_1B} < O_{\Delta ABC} \quad \ldots(1) \end{array}$$

$$\begin{array}{rl} & B_1C_1 < B_1B + BC_1 \\ & B_1A_1 = B_1A_1 \\ + & A_1C_1 = A_1C_1 \\ \hline & O_{\Delta A_1B_1C_1} < O_{\Delta B_1BA_1} \quad \ldots(2) \end{array}$$

(1) i (2) $\Rightarrow O_{\Delta A_1B_1C_1} < O_{\Delta ABC}$

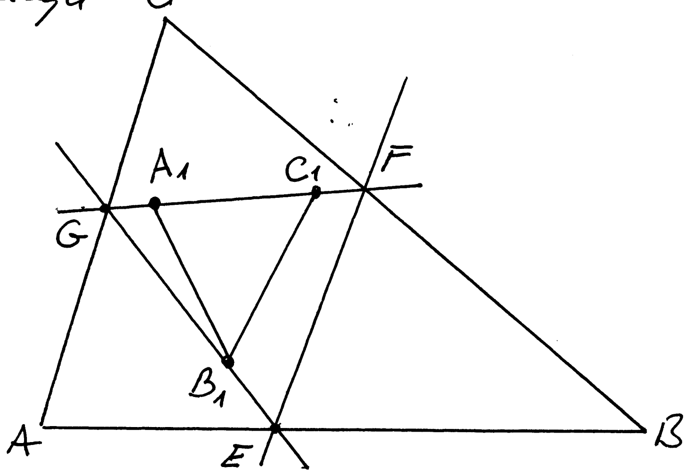
Na osnovu ova dva slučaja riješimo naš zadatak.

Pretpostavimo da tjemena $\Delta A_1B_1C_1$ pripadaju unutrašnjosti ΔABC

$p(A_1, C_1) \cap BC = \{F\}$

$p(A_1, C_1) \cap AC = \{G\}$

$p(G, B_1) \cap AB = \{E\}$

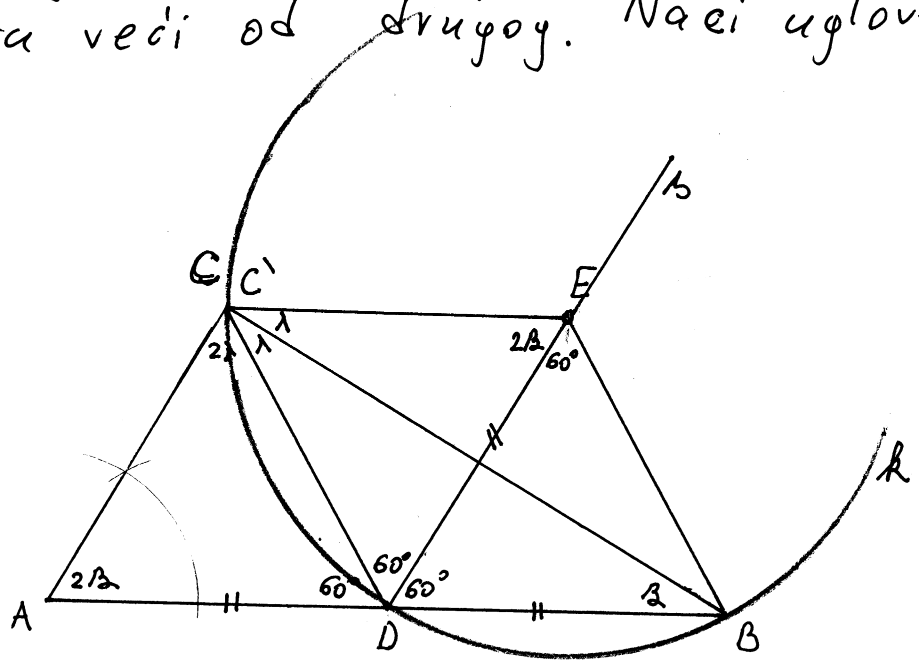


$$\left.\begin{array}{l} 1° \Rightarrow O_{\Delta A_1B_1C_1} < O_{\Delta EFG} \\ 2° \Rightarrow O_{\Delta EFG} < O_{\Delta ABC} \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$\Rightarrow O_{\Delta A_1B_1C_1} < O_{\Delta EFG}$ q.e.d.

(#) Jedan ugao trougla dva puta je veći od drugog, dok težišna linija iz tjemena trećeg ugla dijeli, taj ugao na dva dijela od kojih je jedan dva puta veći od drugog. Naći uglove trougla.

Rj.



Neka je D sredina stranice AB, ΔABC. Prema postavi zadatka imamo $\measuredangle CAB = 2\beta$, $\measuredangle ABC = \beta$, $\measuredangle ACD = 2\lambda$, $\measuredangle BCD = \lambda$.

$3\beta + 3\lambda = 180° \Rightarrow \beta + \lambda = 60°$

$\measuredangle ADC$ je vanjski ugao $\Delta CDB \Rightarrow \measuredangle ADC = 60° \Rightarrow \measuredangle CDB = 120°$.

Na simetrali s ugla $\measuredangle CDB$ uzmimo tačku E takvu da je $DE \cong AD$. Imamo:

$$\left.\begin{array}{l} AD \cong DE \\ \measuredangle ADC \cong \measuredangle EDC = 60° \\ CD \cong CD \end{array}\right\} \xrightarrow{SUS} \Delta ADC \cong \Delta EDC$$

$$\Downarrow$$

$$\measuredangle CAD \cong \measuredangle DEC = 2\beta,$$
$$\text{i } \measuredangle ACD \cong \measuredangle ECD$$

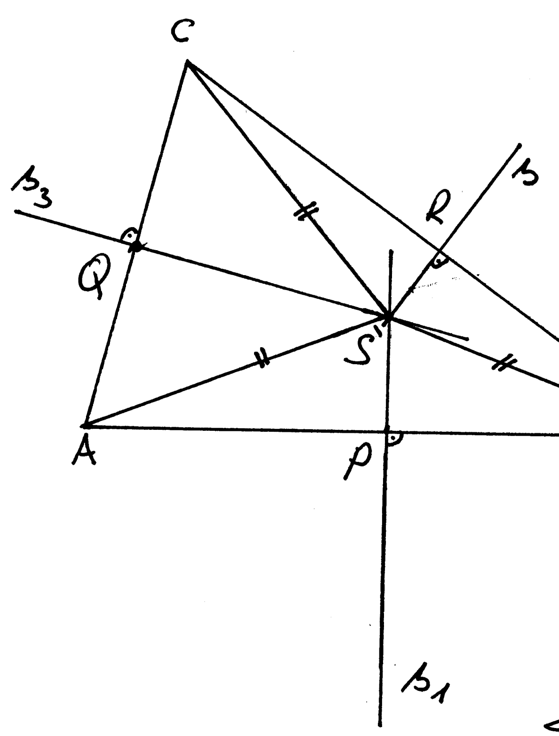
Primjetimo da je ΔDBE jkk sa uglom pri vrhu od $60° \Rightarrow$
$\Rightarrow \measuredangle DEB \cong \measuredangle DBE = 60°$. $\Rightarrow \Delta DEB$ jks.

Opišimo kružnicu k sa centrom u E poluprečnika ED. Neka je $k \cap p(B,C) = C'$. Kako je $\measuredangle DBC'$ oštri periferijski ugao njemu odgovara dvostruki centralni ugao $\measuredangle DEC' = 2\beta$. Ovo je moguće jedino u slučaju $C \equiv C'$ pa $D, B, C \in k$. $\Rightarrow$
$DE \cong CE \Rightarrow \Delta CDE$ jkk sa osnovicom $CD \Rightarrow 2\lambda = 60° \Rightarrow \lambda = 30°$
$\Rightarrow \beta = 30°$ pa $\alpha = 60°$, $\beta = 30°$, $\gamma = 90°$.

(#) Dokazati da se simetrale stranica trougla sijeku u jednoj tački S (S je centar opisane kružnice trougla).

Rj. postavka zadatka

$$\left.\begin{array}{l} s_1 \text{ simetrala stranice } AB \\ s_2 \text{ simetrala stranice } BC \\ s_3 \text{ simetrala stranice } AC \end{array}\right\} \Rightarrow s_1 \cap s_2 \cap s_3 = \{S\}$$



Neka je $s_1 \cap s_3 = \{S'\}$

Označimo sa $\{P\} = AB \cap s_1$ i sa $\{Q\} = AC \cap s_3$.

Posmatrajmo $\Delta APS'$ i $\Delta BPS'$

$$\left.\begin{array}{l} AP \cong BP \\ \measuredangle APS' \cong \measuredangle BPS' = 90^\circ \\ PS' \cong PS' \end{array}\right\} \xRightarrow{SUS} \Delta APS' \cong \Delta BPS' \Rightarrow AS' \cong BS'$$

Dalje imamo

$$\left.\begin{array}{l} AQ \cong CQ \\ \measuredangle AQS' \cong \measuredangle CQS' = 90^\circ \\ QS' \cong QS' \end{array}\right\} \xRightarrow{SUS} \Delta AQS' \cong \Delta CQS' \Rightarrow AS' \cong CS'$$

Označimo sa s pravu koja prolazi kroz tačku S' i okomita je na pravu $p(B,C)$. Označimo sa $\{R\} = BC \cap s$

Imamo:

$$\left.\begin{array}{l} CS' \cong BS' \\ S'R \cong S'R \\ \measuredangle CRS' \cong \measuredangle BRS' = 90^\circ \end{array}\right\} \Rightarrow \Delta CRS' \cong \Delta BRS' \Rightarrow CR \cong BR \Rightarrow$$

$\Rightarrow s$ je simetrala stranice BC, pa prema našim oznakama imamo da je $s \equiv s_2$ i $S' \equiv S$ tj.

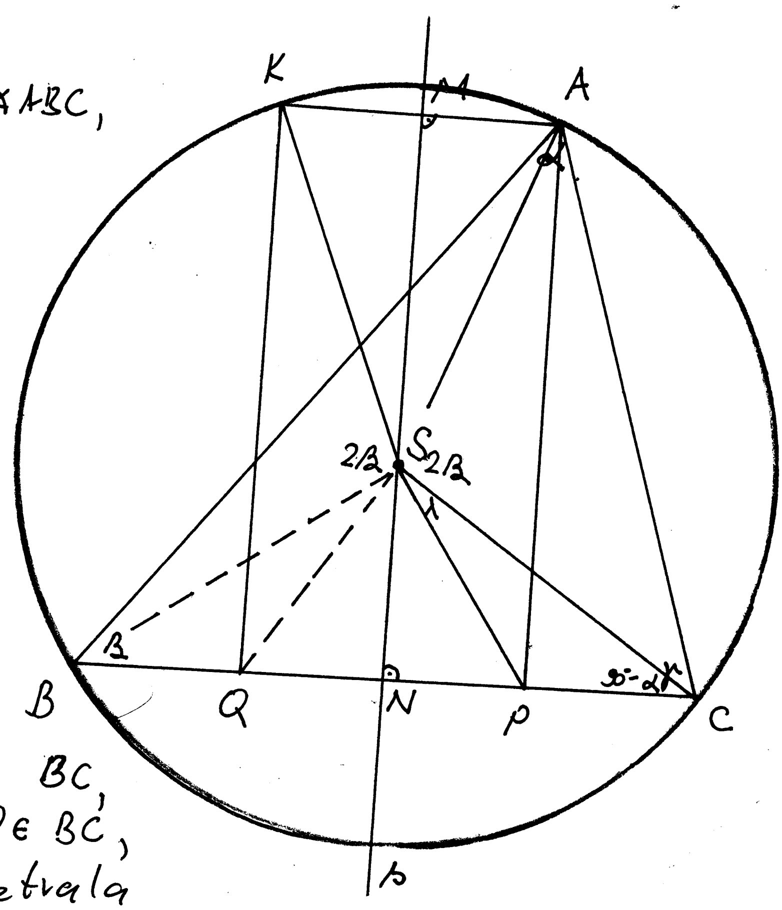
$$s_1 \cap s_2 \cap s_3 = \{S\}$$

q.e.d.

(#) Neka je ΔABC oštrougli trougao sa centrom opisane kružnice u tački S. Tačka $P \in BC$ je ortogonalna projekcija tačke A. Pretpostavimo da je $\sphericalangle BCA \geq \sphericalangle ABC + 30^\circ$. Dokazati da je $\sphericalangle CAB + \sphericalangle CSP < 90^\circ$.

Rj. Označimo sa $\alpha = \sphericalangle BAC$, $\beta = \sphericalangle ABC$, $\gamma = \sphericalangle BCA$ i $\lambda = \sphericalangle CSP$.

Treba dokazati da je
$$\alpha + \lambda < 90^\circ.$$



Primjetimo da je $\sphericalangle CSB = 2\alpha$ pa kako je ΔBCS jkk $(BS = CS = R)$
$\Rightarrow \sphericalangle PCS = 90^\circ - \alpha$.

Dokažimo da je $PS > PC$.

Neka je s simetrala stranice BC, i tačke K i Q takve da $Q \in BC$, $AK \perp s$, $PQ \perp s$ i s je simetrala duži KA i PQ. Neka je $s \cap KA = \{M\}$ i $s \cap PQ = \{N\}$.

s simetrala $BC \Rightarrow S \in s$.

Iz podudarnosti SUS vidimo da je $\sphericalangle KSM \cong \sphericalangle ASM$, $\sphericalangle QSN \cong \sphericalangle PSN$ i $\sphericalangle BSN = \sphericalangle CSN \Rightarrow \sphericalangle BSK = \sphericalangle ASC = 2\beta$.

$\sphericalangle KSA = \sphericalangle BSA - \sphericalangle BSK = \sphericalangle BSA - \sphericalangle ASC = 2\gamma - 2\beta$

Iz pretpostavke zadatka je $\gamma \geq \beta + 30^\circ \Rightarrow 2\gamma - 2\beta \geq 60^\circ$

tj. $\sphericalangle KSA \geq 60^\circ$, $\left.\begin{array}{l}\sphericalangle KSA = 60^\circ \Rightarrow AK = R \\ \sphericalangle KSA > 60^\circ \Rightarrow AK > R\end{array}\right\} \Rightarrow AK \geq R$

tj. $QP \geq R$

$SP + R = SQ + SC > QC = QP + PC \geq PC + R \Rightarrow SP > PC$.

U ΔPCS $\sphericalangle PCS > \sphericalangle CSP \Rightarrow 90^\circ - \alpha > \lambda$

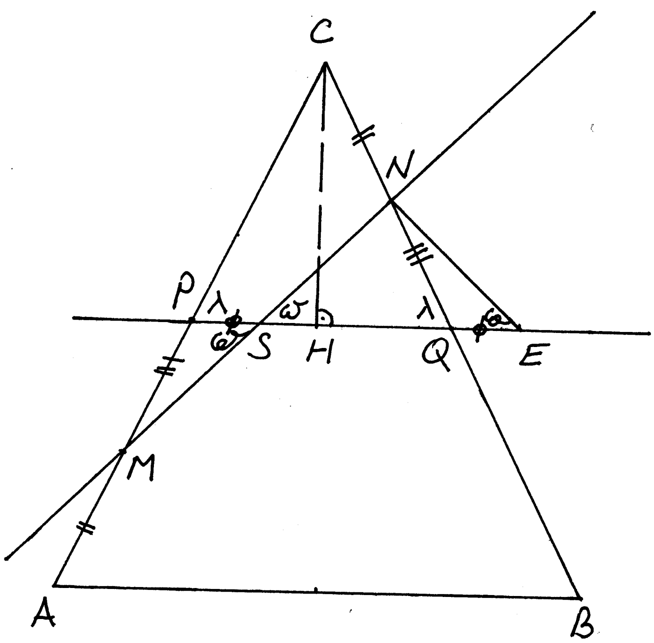
tj. $\alpha + \lambda < 90^\circ \Rightarrow \sphericalangle CAB + \sphericalangle CSP < 90^\circ$

q.e.d.

(#) Na bočnim stranicama AC i BC jednakokrakog trougla ΔABC date su tačke M i N redom, tako da je $CM + CN \cong AC$ (M i N nisu sredine stranica). Dokazati da je prava određena sredinama bočnih stranica trougla incidentna sa sredinom duži MN.

Rj. postavka zadatka

$$\left.\begin{array}{l} \Delta ABC \text{ jkk sa osnovicom u } AB \\ M \in AC,\ N \in BC \text{ takve } CM + CN \cong AC \\ (M \text{ i } N \text{ nisu sredine stranica}) \\ P \text{ sredina } AC,\quad Q \text{ sredina } BC \\ MN \cap PQ = \{S\} \end{array}\right\} \Rightarrow S \text{ sredina duži } MN$$



Ako sa H označim ortogonalnu projekciju iz tačke C na osnovu pravila SSU (ugao od 90°) možemo zaključiti da je $\measuredangle CPH \cong \measuredangle CQH = \lambda$.

Kako je $CM + CN \cong AC \cong BC \Rightarrow$
$\Rightarrow AM \cong CN$

P i Q su sredine bočnih strana $\Rightarrow AP \cong PC \cong QC \cong BQ$ pa imamo $PM \cong QN$.

Uzmimo tačku $E \in pp[P,Q)$ takvu $P-Q-E$ i $QE \cong PS$.

Sad imamo

$$\left.\begin{array}{l} PM \cong QN \\ \measuredangle SPM \cong \measuredangle NQE \\ \quad (= 180^\circ - \lambda) \\ PS \cong QE \end{array}\right\} \overset{SUS}{\Longrightarrow} \Delta PMS \cong \Delta QNE$$

$$\Downarrow$$

$$\measuredangle NEQ \cong \measuredangle MSP = \omega \text{ i } MS \cong NE$$

Kako su uglovi $\measuredangle MSP$ i $\measuredangle NSQ$ unakrsni $\Rightarrow \measuredangle PSM \cong \measuredangle NSE = \omega$

$\Rightarrow \Delta SEN$ je jkk sa osnovicom u SE tj.

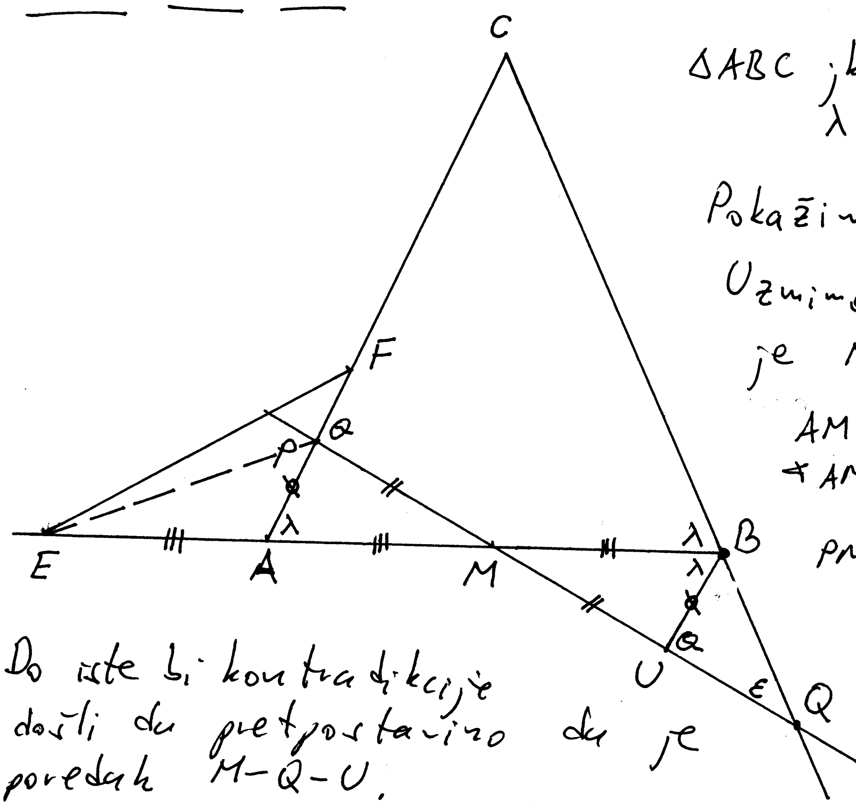
$SN \cong NE \Rightarrow SN \cong SM \Rightarrow S$ sredina duži MN

q.e.d.

(#) Kroz tačku M-sredinu osnovice AB jednakokrakog trougla ΔABC prolazi prava koja siječe prave $p(A,C)$ i $p(B,C)$ u tačkama P i Q redom, tako da je $P-M-Q$. Dokazati da je $PQ > AB$.

Rj: postavka zadatka:

$$\left.\begin{array}{l} \Delta ABC \text{ jkk sa osnovicom u } AB \\ M \text{ sredina } AB \\ P \in p(A,C),\ Q \in p(B,C) \text{ t.d. } P-M-Q \end{array}\right\} \Rightarrow PQ > AB$$



ΔABC jkk, $\measuredangle CAB = \measuredangle ABC = \lambda$

λ je oštar ugao

Pokažimo prvo da je $BQ > AP$.

Uzmimo tačku $U \in pp[M,Q)$ takvu da je $MP \cong MU$. Sad imamo:

$$\left.\begin{array}{l} AM \cong BM \\ \measuredangle AMP \cong \measuredangle BMU \\ \text{(unakrsni uglovi)} \\ PM \cong UM \end{array}\right\} \xrightarrow{sus} \Delta AMP \cong \Delta BMU \Downarrow AP \cong BU \text{ i } \measuredangle MBU \cong \measuredangle MAP$$

Sad možemo zaključiti da je poredak $M-U-Q$ (Zašto? Ako bi bilo $U \equiv Q$ imali bi da je $\measuredangle MBQ = \lambda$ # kontradikciji (λ je oštar ugao))

Do iste bi kontradikcije došli da pretpostavimo da je poredak $M-Q-U$.

Primjetimo da je $p(A,P) \parallel p(U,B)$

$\Rightarrow \measuredangle QPC \cong \measuredangle QUB = \theta$.

Ugao $\measuredangle QPC$ je vanjski ugao $\Delta AMQ \Rightarrow \lambda < \theta$

Označimo sa $\varepsilon = \measuredangle UQB$. Ugao $\measuredangle ABC$ je vanjski ugao $\Delta MQB \Rightarrow \varepsilon < \lambda$ $\Big\} \Rightarrow$

$\Rightarrow \theta > \varepsilon \Rightarrow BQ > BU$ tj. $AP < BQ$.

Uzmimo tačku E takvu da $B-A-E$ i $AE \cong AM$.

Uzmimo tačku F takvu da $A-F-C$ i $AF \cong BQ$. Kako je $AP < BQ$ to je poredak $A-P-F$. Sad imamo

$$\left.\begin{array}{l} AE \cong MB \\ \measuredangle EAF \cong \measuredangle MBQ \\ (=180^\circ - \lambda) \\ AF \cong BQ \end{array}\right\} \xrightarrow{sus} \Delta EAF \cong \Delta MBQ \Downarrow EF \cong MQ.$$

Primjetimo da je $EF > EP$ (Zašto?) i da je u ΔEPM $EP + PM > EM$.

Sad imamo $PQ = PM + MQ = EF + PM > EP + PM > EM = EA + AM = AM + MB = AB$

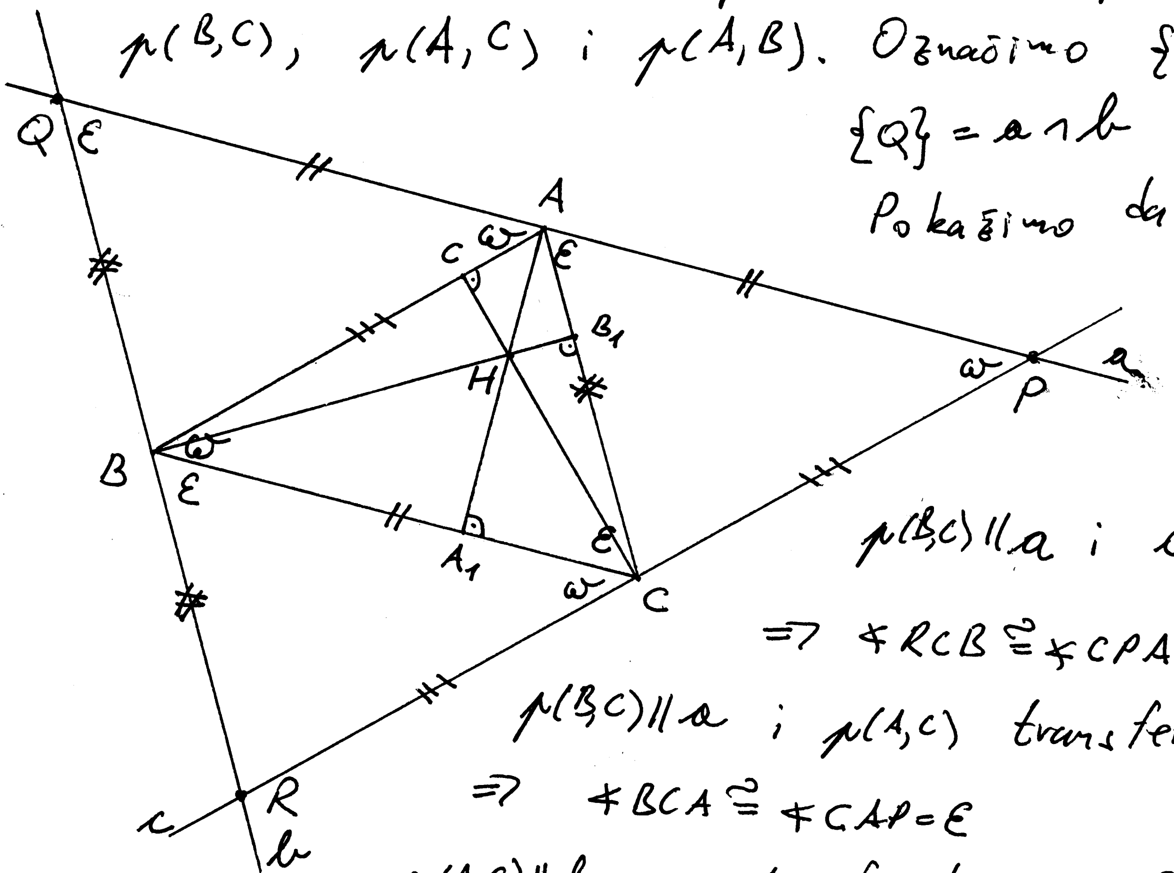
tj. $PQ > AB$ q.e.d.

(#) Dokazati da se visine trougla sijeku u jednoj tački H (H zovemo ortocentar trougla).

Rj: postavka zadatka:

$$\left.\begin{array}{l}\Delta ABC \\ AA_1,\ BB_1 \text{ i } CC_1 \text{ visine trougla}\end{array}\right\} \Rightarrow AA_1 \cap BB_1 \cap CC_1 = \{H\}$$

Neka prave a, b i c redom prolaze kroz tačke A, B i C i neka su redom paralelne sa pravama $p(B,C)$, $p(A,C)$ i $p(A,B)$. Označimo $\{P\} = a \cap c$, $\{Q\} = a \cap b$ i $\{R\} = c \cap b$. Pokažimo da su trouglovi ΔRCB, ΔAPC i ΔQAB podudarni.



$p(B,C) \parallel a$ i c transferzala $\Rightarrow \measuredangle RCB \cong \measuredangle CPA = \omega$

$p(B,C) \parallel a$ i $p(A,C)$ transferzala $\Rightarrow$

$\Rightarrow \measuredangle BCA \cong \measuredangle CAP = \varepsilon$

$p(A,C) \parallel b$ i a transferzala $\Rightarrow \measuredangle BQA \cong \measuredangle CAP = \varepsilon$

$p(A,B) \parallel c$ i $p(B,C)$ transferzala $\Rightarrow \measuredangle RCB \cong \measuredangle CBA = \omega$

$p(B,C) \parallel a$ i $p(A,B)$ transferzala $\Rightarrow \measuredangle CBA \cong \measuredangle BAQ = \omega$

$p(B,C) \parallel a$ i transferzala $\Rightarrow \measuredangle AQB \cong \measuredangle CBR = \varepsilon$

$$\left.\begin{array}{l}\measuredangle ABC \cong \measuredangle APC = \omega \\ \measuredangle BCA \cong \measuredangle CAP = \varepsilon \\ AC \cong AC\end{array}\right\} \overset{UUS}{\Longrightarrow} \Delta ABC \cong \Delta CPA \Rightarrow BC \cong AP$$

$$\left.\begin{array}{l}\measuredangle BCA \cong \measuredangle BQA = \varepsilon \\ \measuredangle ABC \cong \measuredangle BAQ = \omega \\ AB \cong AB\end{array}\right\} \overset{UUS}{\Longrightarrow} \Delta ABC \cong \Delta ABQ \Rightarrow BC \cong AQ$$

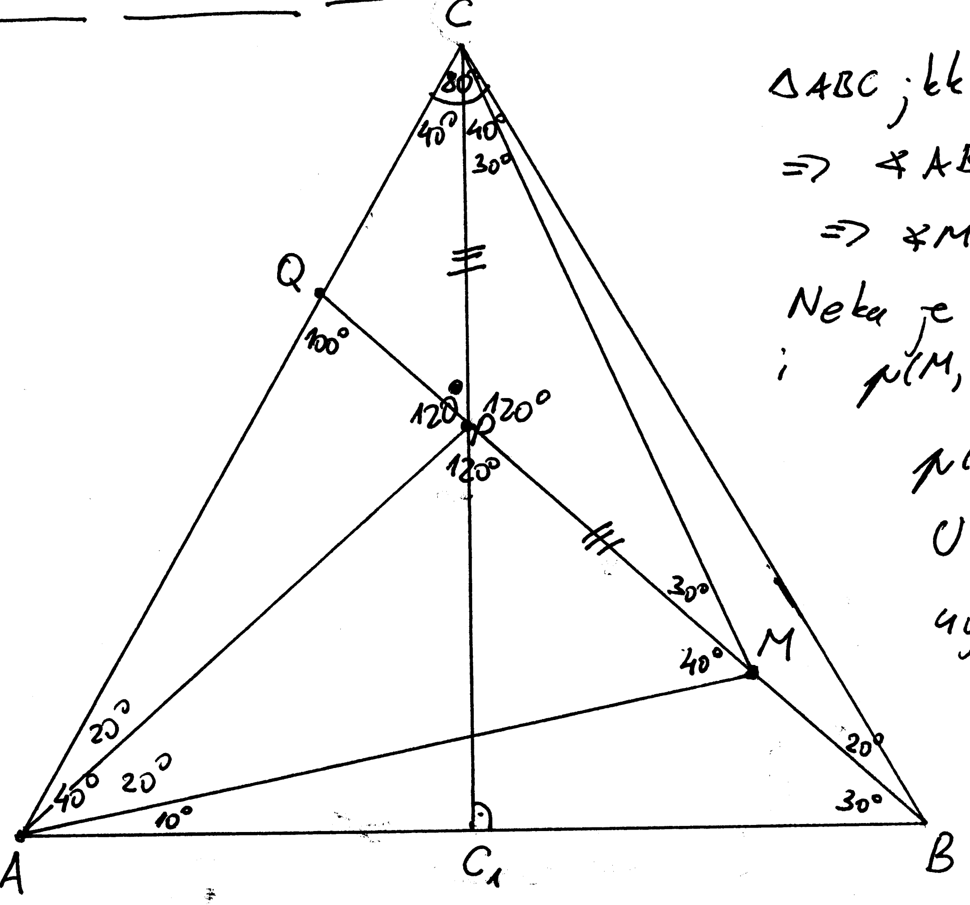
Možemo primjetiti da su ΔBRC, ΔACP i ΔQBA podudarni (zbog pravila USU)

U trouglu ΔPQR prave $p(A,A_1)$, $p(B,B_1)$ i $p(C,C_1)$ su simetrale stranica pa prema ranije urađenom zadatku one se sijeku u jednoj tački H. Prema tome $AA_1 \cap BB_1 \cap CC_1 = \{H\}$ q.e.d.

Unutar $\triangle ABC$ uzeta je tačka M takva da je $\measuredangle MBA = 30°$, $\measuredangle MAB = 10°$. Odrediti ugao $\measuredangle AMC$ ako je $\measuredangle ACB = 80°$ i $AC \cong BC$.

Rj: postavka zadatka

$\triangle ABC$ jkk sa osnovicom AB
M tačka unutar $\triangle ABC$ taka $\measuredangle MBA = 30°$ i $\measuredangle MAB = 10°$
$\measuredangle ACB = 80°$
$\Rightarrow \measuredangle AMC = ?$



$\triangle ABC$ jkk i $\measuredangle ACB = 80° \Rightarrow$
$\Rightarrow \measuredangle ABC \cong \measuredangle BAC = 50° \Rightarrow$
$\Rightarrow \measuredangle MAC = 40°$ i $\measuredangle MBC = 20°$

Neka je CC_1 visina $\triangle ABC$ i $p(M,B) \cap CC_1 = \{P\}$ i $p(M,B) \cap AC = \{Q\}$.

U $\triangle ABQ$ znamo dva ugla $\Rightarrow \measuredangle AQB = 100°$
$\Rightarrow AMQ = 40°$.

$\measuredangle APM = 120°$

$\Uparrow$

$AC_1 \cong BC_1$
$\measuredangle AC_1P \cong \measuredangle BC_1P = 90°$
$PC_1 \cong PC_1$
$\xRightarrow{SUS} \triangle AC_1P \cong \triangle BC_1P$

$\Downarrow$

$\measuredangle C_1AP \cong \measuredangle C_1BP = 30° \Rightarrow \measuredangle PAM = 20°$

U $\triangle APC$ znamo da su $\measuredangle CAP = 20°$ i $\measuredangle ACC_1 = 40° \Rightarrow \measuredangle APC = 120°$
$\Rightarrow \measuredangle MPC = 120°$. Posmatrajmo $\triangle AMP$ i $\triangle ACP$.

$\measuredangle MAP \cong \measuredangle CAP = 20°$
$AP \cong AP$
$\measuredangle MPA \cong \measuredangle CPA = 120°$
$\xRightarrow{USU} \triangle AMP \cong \triangle ACP$

$\Downarrow$

$PC \cong MP \Rightarrow$

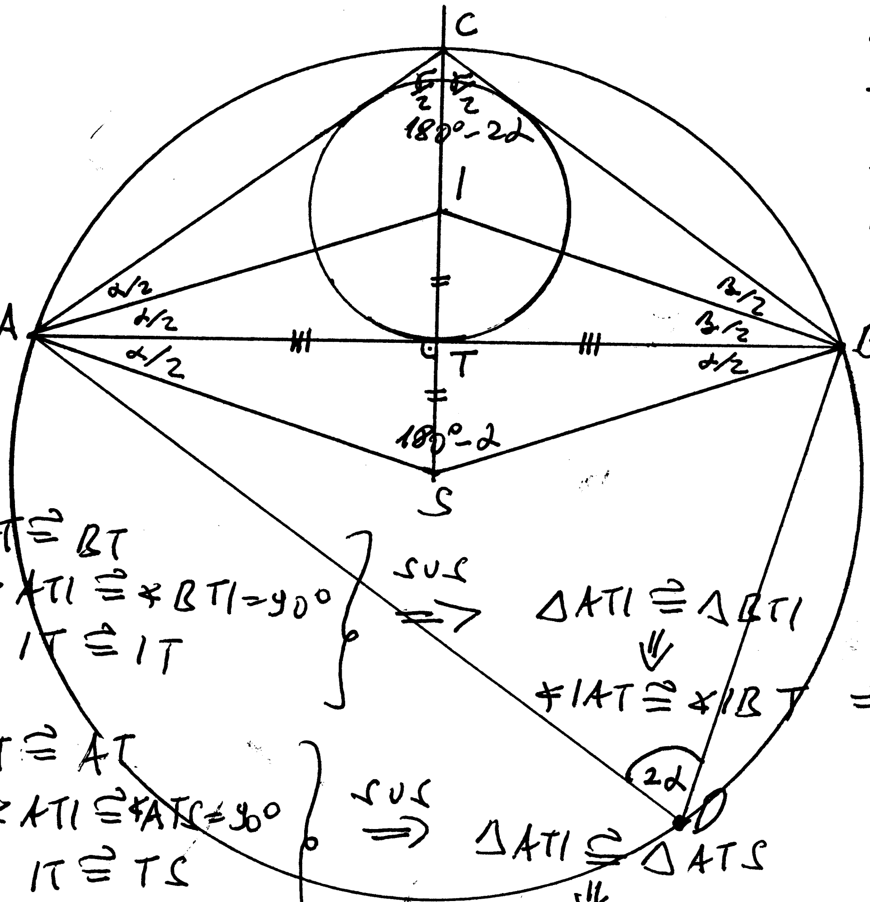
$\Rightarrow \triangle PMC$ je jkk sa osnovicom MC i $\measuredangle MPC = 120° \Rightarrow$
$\Rightarrow \measuredangle PMC \cong \measuredangle PCM = 30° \Rightarrow \measuredangle AMC = 70°$

što je i trebalo pronađi

(#) Odrediti uglove trougla kod kojeg je centar opisane kružnice simetričan centru upisane kružnice u odnosu na jednu od njegovih stranica.

Rj. postavka zadatka

$$\left.\begin{array}{l}\Delta ABC,\ I \text{ centar upisane kružnice,}\\ S \text{ centar opisane kružnice}\\ \text{tačka } S \text{ simetrična tački } I \text{ u}\\ \text{odnosu na stranicu } AB\end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l}\measuredangle ABC=?\\ \measuredangle ACB=?\\ \measuredangle CAB=?\end{array}$$



Neka je $\{T\} = SI \cap AB$

Tačka I pripada presjeku simetrala uglova, koje ćemo označiti sa α, β i γ.

Tačka S pripada presjeku simetrala stranica ΔABC pa je $p(I,S)$ simetrala stranice AB $\Rightarrow$

$\Rightarrow AT \cong BT$

$$\left.\begin{array}{l}AT \cong BT\\ \measuredangle ATI \cong \measuredangle BTI = 90°\\ IT \cong IT\end{array}\right\} \overset{SUS}{\Rightarrow} \Delta ATI \cong \Delta BTI$$

$$\Downarrow$$

$$\measuredangle IAT \cong \measuredangle IBT \Rightarrow \frac{\alpha}{2} = \frac{\beta}{2} \Rightarrow \alpha = \beta$$

$$\left.\begin{array}{l}AT \cong AT\\ \measuredangle ATI \cong \measuredangle ATS = 90°\\ IT \cong TS\end{array}\right\} \overset{SUS}{\Rightarrow} \Delta ATI \cong \Delta ATS$$

$$\Downarrow$$

$$\measuredangle IAT \cong \measuredangle SAT = \alpha/2$$

I način:

Primjetimo da je ΔASC jkk ($AS=SC=R$) pa $3\cdot\frac{\alpha}{2} = \frac{\gamma}{2}$ tj. $\gamma = 3\alpha$. Kako je $\alpha+\beta+\gamma = 180°$ tj. $5\alpha = 180° \Rightarrow \alpha = \beta = 36°$

$\gamma = 108°$ što je i trebalo naći

II način:

U ΔABC, $\alpha = \beta \Rightarrow \gamma = 180° - 2\alpha$

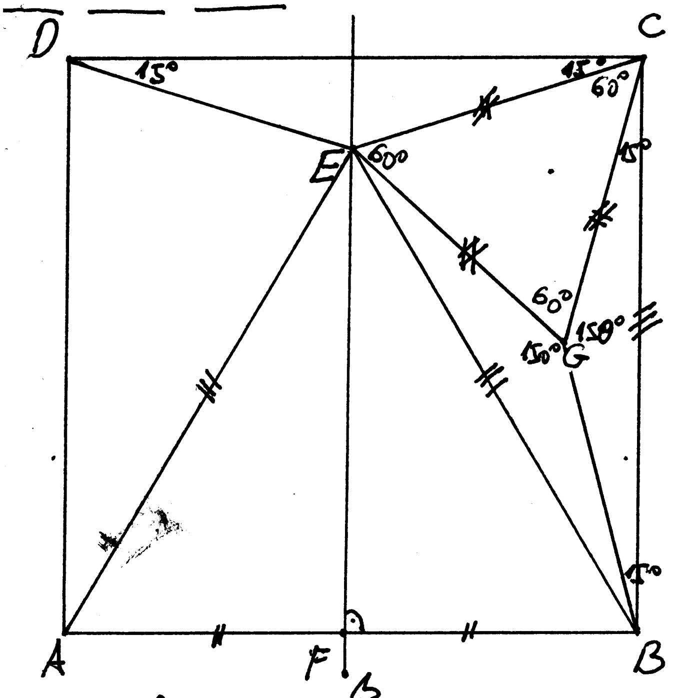
$\measuredangle ACB$ je tupi periferiski ugao nad tetivom AB, Neka je D proizvoljna tačka na kružnici takva da je $\measuredangle ADB$ oštri periferiski ugao $\Rightarrow \measuredangle ACB + \measuredangle ADB = 180° \Rightarrow \measuredangle ADB = 2\alpha$. Kako je $\Delta AST \cong \Delta BST$ (prema pravilu sus) to je $\measuredangle SBT = \alpha/2 \Rightarrow \measuredangle ASB = 180° - \alpha$.

ZAVRŠITE SAMI (Uputa: Kakva je veza između $\measuredangle ASB$ i $\measuredangle ADB$?)

(#) U unutrašnjosti kvadrata $\square ABCD$ data je tačka E takva da je $\triangle CDE$ jednakokraki sa uglovima kod C i D od $15°$. Dokazati da je $\triangle ABE$ jednakostraničan.

Rj. postavka zadatka

$\left.\begin{array}{l} \square ABCD \text{ kvadrat} \\ E \text{ tačka u unutrašnjosti kvadrata} \\ \triangle CDE \text{ jkk sa uglovima } \measuredangle ECD \cong \measuredangle EDC = 15° \end{array}\right\} \Rightarrow \triangle ABE$ jednakostraničan



Kako je $\triangle CDE$ jkk to E leži na simetrali s duži CD a time i duži AB. Imamo $\{F\} = s \cap AB$

$\left.\begin{array}{l} AF \cong BF \\ \measuredangle AFE \cong \measuredangle BFE = 90° \\ EF \cong EF \end{array}\right\} \xRightarrow{SUS} \triangle AFE \cong \triangle BFE$

$\Downarrow$

$AE \cong BE$

Uzmimo tačku G u unutrašnjosti $\triangle BCE$ takvu da je $\measuredangle GBC \cong \measuredangle GCB = 15°$.

$\left.\begin{array}{l} \measuredangle EDC \cong \measuredangle GBC = 15° \\ DC \cong BC \\ \measuredangle ECD \cong \measuredangle GCB = 15° \end{array}\right\} \xRightarrow{USU} \triangle DEC \cong \triangle BCG$

$\Downarrow$

$CE \cong GC$, a kako je još $\measuredangle ECG = 60°$

to je $\triangle ECG$ jks (ugao pri vrhu jednakokrakog trougla je $60°$)

Primjetimo da su $\measuredangle DEC \cong \measuredangle CGB = 150°$ pa je i $\measuredangle BGE = 150°$.

$\left.\begin{array}{l} EG \cong CG \\ \measuredangle EGB \cong \measuredangle CGB = 150° \\ GB \cong GB \end{array}\right\} \xRightarrow{SUS} \triangle EGB \cong \triangle CGB$

$\Downarrow$

$EB \cong BC$

Kako je $BC \cong AB$ ($\square ABCD$ kvadrat) to je $AE \cong BE \cong AB$

tj. $\triangle ABE$ jednakostranični

q.e.d.

(#) Duž koja spaja sredine dvije susjedne stranice u trouglu se zove srednja linija trougla. Neka su P i Q redom sredine stranica AB i AC trougla ΔABC. Dokazati da je $PQ = \frac{1}{2} BC$ i da je $p(P,Q) \parallel p(B,C)$.

Rj: postavka zadatka

$$\left.\begin{array}{l} \Delta ABC,\ P \text{ sredina } AB \\ Q \text{ sredina } AC \end{array}\right\} \Rightarrow PQ = \frac{1}{2} BC \ \text{ i } \ p(B,C) \parallel p(P,Q)$$

Na pravoj $p(B,Q)$ uzmimo tačku D tako da je $B-Q-D$ i $BQ \cong QD$. Primjetimo

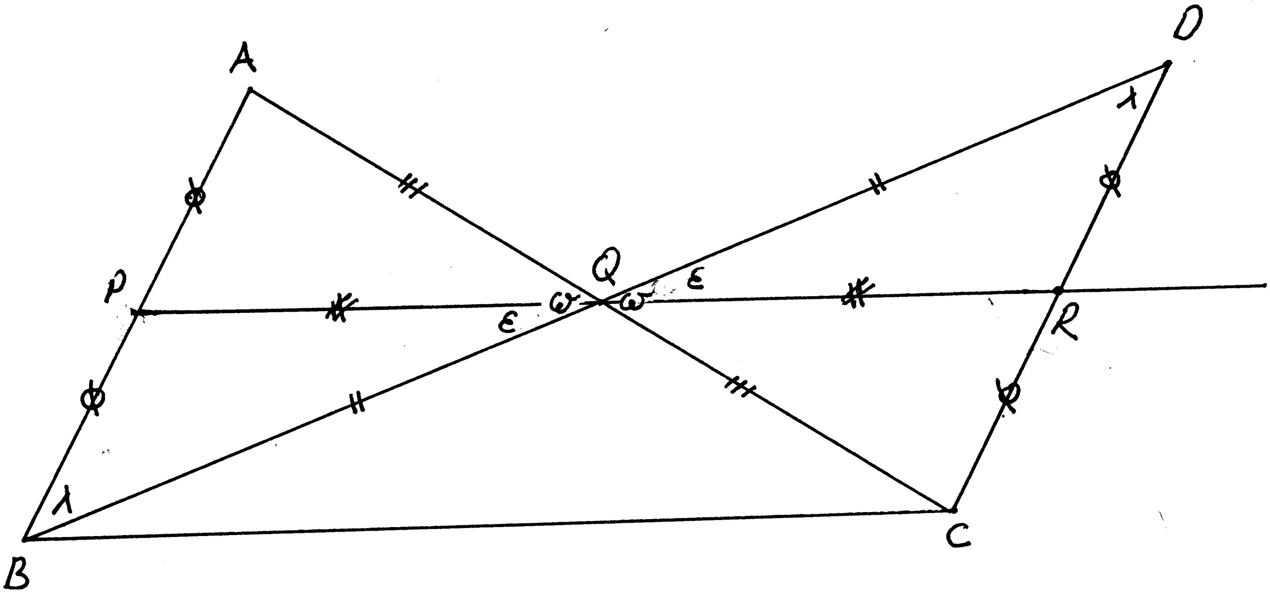
$$\left.\begin{array}{l} BQ \cong QD \\ \measuredangle BQA \cong \measuredangle DQC = \omega \\ AQ \cong CQ \end{array}\right\} \overset{SUS}{\Longrightarrow} \Delta AQB \cong \Delta CQD$$

$$\Downarrow$$

$$\measuredangle ABQ \cong \measuredangle CDQ = \lambda \Rightarrow$$

$$\text{i } AB \cong CD$$

$\Rightarrow p(B,A) \parallel p(C,D)$. Označimo sa $\{R\} = p(P,Q) \cap CD$.



$$\left.\begin{array}{l} \measuredangle PBQ \cong \measuredangle QDR = \lambda \\ BQ \cong DQ \\ \measuredangle PQB \cong \measuredangle DQR = \varepsilon \end{array}\right\} \overset{USU}{\Longrightarrow} \Delta PQB \cong \Delta RQD$$

$\nearrow PQ \cong QR$

$\Downarrow$

$PB \cong DR$ a kako je $AB \cong CD$

to je i $CR \cong DR$. (P je sredina AB).

U četverouglu $\square BCRP$ imamo $PB \cong CR$ i $p(P,B) \parallel p(C,R) \Rightarrow$

$\Rightarrow \square BCRP$ paralelogram $\Rightarrow p(P,Q) \parallel p(B,C)$

q.e.d

a kako je $PR \cong BC$ i $PQ \cong QR \Rightarrow PQ = \frac{1}{2} BC$ q.e.d.

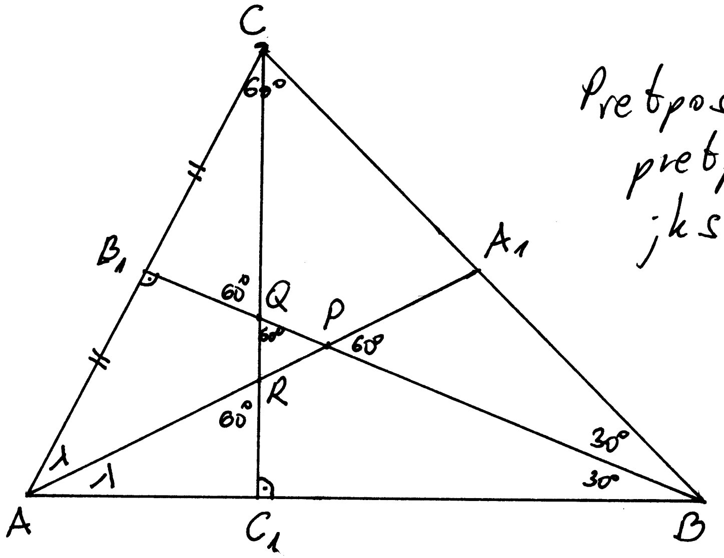
(#) Iz jednog tjemena oštrouglog trougla konstruisana je visina, iz drugog simetrala ugla a iz trećeg težišna duž. Dokazati da trougao kojeg obrazuju njihove presječne tačke ne može biti jednakostraničan.

Rj. postavka zadatka

$$\left.\begin{array}{l} \triangle ABC,\ CC_1 \text{ visina trougla} \\ AA_1 \text{ simetrala } \measuredangle BAC \\ BB_1 \text{ težišna duž} \\ AA_1 \cap CC_1 = \{R\},\ AA_1 \cap BB_1 = \{P\} \\ BB_1 \cap CC_1 = \{Q\} \end{array}\right\} \Rightarrow \triangle PQR \text{ nije jednakostraničan}$$

— — —

$\triangle ABC$ je raznostraničan trougao.



Pretpostavimo suprotno tvrdnji tj. pretpostavimo da je $\triangle PQR$ jks, tj. $\measuredangle RPQ \cong \measuredangle PQR \cong \measuredangle QRP = 60°$.

$\triangle AC_1R \Rightarrow \lambda = 30°$

pa je $\measuredangle BAC = 60°$

$\triangle C_1BQ \Rightarrow \measuredangle ABB_1 = 30°$

$\triangle ABB_1$ $(\measuredangle B_1AB = 60°,\ \measuredangle ABB_1 = 30°) \Rightarrow \measuredangle BB_1A = 90°$

$$\left.\begin{array}{l} AB_1 \cong CB_1 \\ \measuredangle BB_1A \cong \measuredangle BB_1C = 90° \\ BB_1 \cong BB_1 \end{array}\right\} \xrightarrow{SUS} \triangle BB_1A \cong \triangle BB_1C$$

$$\Downarrow$$

$\measuredangle ABB_1 \cong \measuredangle B_1BC = 30°$

i $\measuredangle B_1AB \cong \measuredangle B_1CB = 60°$

$\triangle ABC$ je jks $\Rightarrow P \equiv Q \equiv R$

#kontradikcija

(sa pretpostavkom da je $\triangle ABC$ raznostraničan ili sa pretpostavkom da postoji $\triangle PQR$)

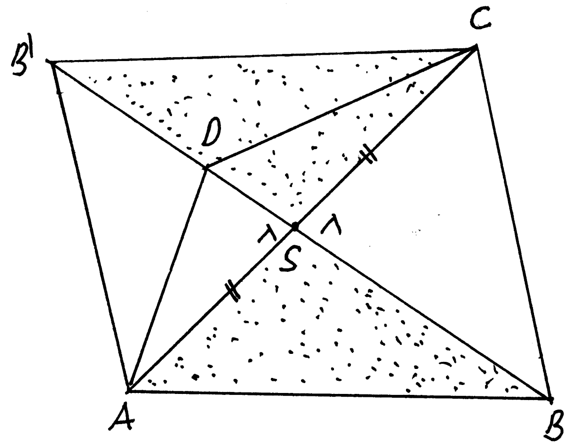
Pretpostavka suprotna tvrdnji nas vodi u kontradikciju pa nije tačna. Prema tome $\triangle PQR$ ne može biti jks

q.e.d.

(#) Dijagonala AC konveksnog četvorougla $\square ABCD$ polovi njegov obim, a njena sredina pripada dijagonali BD. Dokazati da je $AB \cong CD$ i $AD \cong BC$.

Rj: postavka zadatka

$$\left.\begin{array}{l} \square ABCD \text{ konveksan četvorougao} \\ AB + BC \cong AD + CD = \frac{O}{2} \\ AC \cap BD = \{S\},\ S \text{ sredina } AC \end{array}\right\} \Longrightarrow AB \cong CD \ \text{ i } \ AD \cong BC$$



Na polupravoj $pp[S, D)$ uzmimo tačku B' tako da je $SB' \cong SB$. Moguća su tri slučaja:

1° $S - D - B'$

2° $S - B' - D$

3° $D \equiv B'$

Bez obzira koji od ovih slučajeva da se desi, imamo:

$$\left.\begin{array}{l} AS \cong CS \\ \measuredangle ASB' \cong CSB = \lambda \\ \text{(unakrsni uglovi)} \\ BS \cong SB' \end{array}\right\} \xRightarrow{SUS} \triangle ASB' \cong \triangle CSB \Downarrow AB' \cong BC$$

Isto tako

$$\left.\begin{array}{l} AS \cong CS \\ \measuredangle ASB \cong \measuredangle CSB' \\ \text{(unakrsni uglovi)} \\ BS \cong SB' \end{array}\right\} \xRightarrow{SUS} \triangle ASB \cong \triangle CSB' \Downarrow CB' \cong AB$$

Kako je $AB + BC \cong AD + CD$ to je i $AB' + CB' \cong AD + DC$ $\ldots(*)$

Sad, ako bi bilo $S - D - B'$ imali bi $AD + DC < AB' + CB'$ #kontradikcija (sa $*$)

Ako bi bilo $S - B' - D$ imali bi $AB' + B'C < AD + DC$ #kontradikcija (sa $*$)

Prema tome $B' \equiv D \Rightarrow AD \cong AB'$ i $CD \cong CB'$

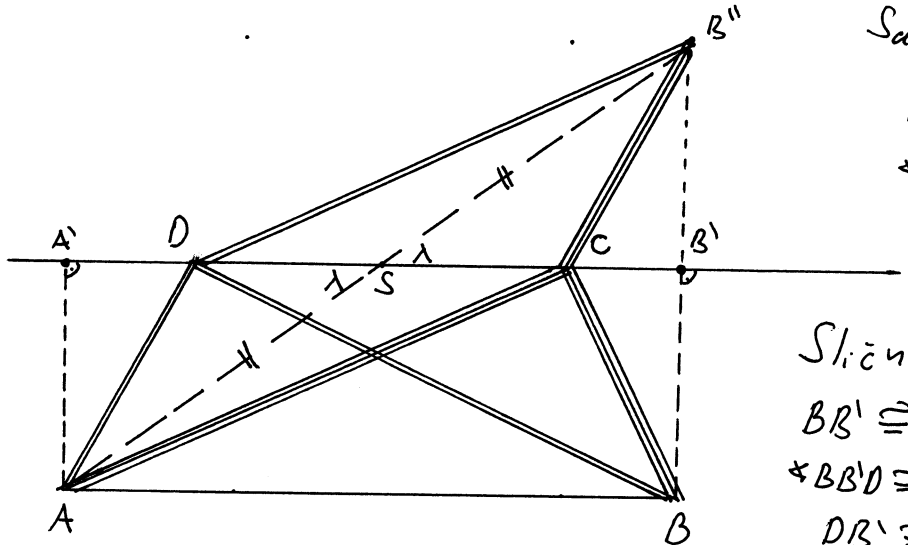
pa je $AB \cong CD$ i $AD \cong BC$

q.e.d.

\# U konveksnom četverouglu $\square ABCD$ rastojanja tjemena A i B od prave $p(C,D)$ su podudarna, a pored toga je $AC+CB \cong AD+DB$. Dokazati da je $AD \cong BC$ i $AC \cong BD$.

Rj: postavka zadatka

$$\left.\begin{array}{l} \square ABCD \text{ konveksan, } A' \text{ ortog. proj. tač } A \text{ na } p(C,D) \\ B' \text{ ortog. proj. tač } B \text{ na } p(C,D), \ AA' \cong BB' \\ AC+CB \cong AD+BD \end{array}\right\} \Longrightarrow \begin{array}{c} AD \cong BC \\ \text{i} \\ AC \cong BD \end{array}$$



Uzmimo tačku B'' takvu da je $BB' \cong BB''$ i $B-B'-B''$. Sad imamo

$$\left.\begin{array}{l} BB' \cong B'B'' \\ \measuredangle CB'B \cong \measuredangle CB'B'' = \text{prav} \\ B'C \cong B'C \end{array}\right\} \overset{SUS}{\Longrightarrow} \triangle CB'B \cong \triangle CB'B'' \Rightarrow BC \cong B''C$$

Slično:

$$\left.\begin{array}{l} BB' \cong B'B'' \\ \measuredangle BB'D \cong \measuredangle B''B'D = \text{prav} \\ DB' \cong DB' \end{array}\right\} \overset{SUS}{\Longrightarrow} \triangle DB'B \cong \triangle DB'B'' \Rightarrow BD \cong B''D$$

Posmatrajmo dijagonalu AB'' četverougla $\square ACB''D$ ($AC+CB'' \cong AD+DB''$)

Označimo sa $\{S\} = AB'' \cap CD$

$$\left.\begin{array}{l} \measuredangle SA'A \cong \measuredangle SB'B'' \\ \quad \text{(prav ugao)} \\ \measuredangle A'SA \cong \measuredangle B'SB'' = \lambda \\ \quad \text{(unakrsni uglovi)} \\ AA' \cong B''B' \end{array}\right\} \overset{UUS}{\Longrightarrow} \triangle ASA' \cong \triangle B''SB' \Rightarrow AS \cong SB''$$

Sad ako duž SD nanesem na polupravu $p[S,C)$ nije teško pokazati da se mora desiti slučaj $SD \cong SC$, tj. u $\square ACB''D$ dijagonale se polove.

$$\left.\begin{array}{l} AS \cong B''S \\ \measuredangle ASD \cong B''SC = \lambda \\ CS \cong SD \end{array}\right\} \overset{SUS}{\Longrightarrow} \triangle ASD \cong B''SC$$

$$\Downarrow$$

$$\left.\begin{array}{l} AD \cong B''C \\ B''C \cong BC \end{array}\right\} \Rightarrow AD \cong BC$$

q.e.d.

Kako je još $AC+\underline{\underline{CB}} \cong \underline{\underline{AD}}+BD$ i $AD \cong BC$

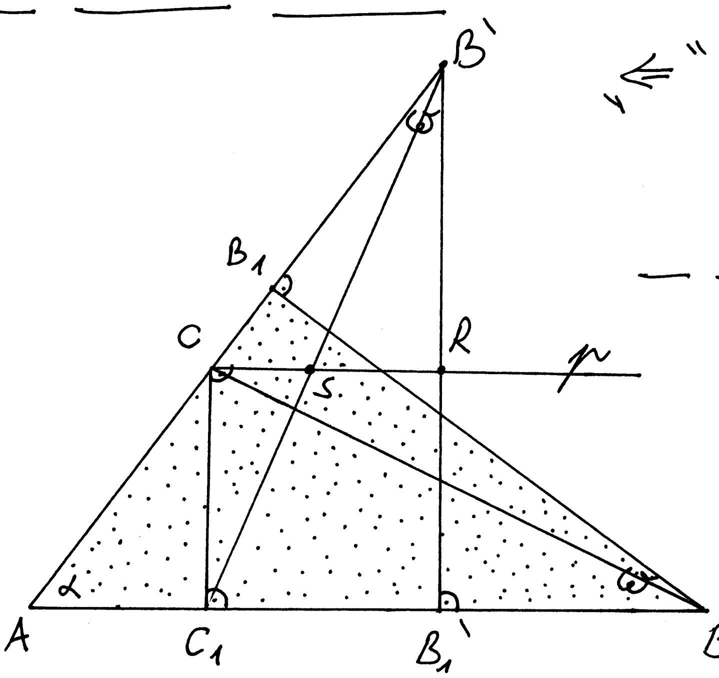
$$\Downarrow$$

$AC \cong BD$

q.e.d.

(#) Dokazati da većoj visini trougla odgovara manja stranica i obrnuto.

R: postavka zadatka
ΔABC, BB_1 i CC_1 visine trougla $\Rightarrow$
$\Rightarrow$ $BB_1 > CC_1$ akko $AC < AB$



"$\Leftarrow$": $\left.\begin{array}{l}\Delta ABC,\\ BB_1 \text{ i } CC_1 \text{ visine}\\ AC < AB\end{array}\right\} \Rightarrow BB_1 > CC_1$

Kako je $AC < AB$ na $p(A,C)$ postoji tačka B' takva da je $A-C-B'$ i $AB' \cong AB$.
Neka je B_1' ortogonalna projekcija tačke B' na pravu $p(A,B)$.

Pokažimo da je $CC_1 < B'B_1'$. ...(*)

$\measuredangle C_1CB'$ je vanjski ugao ΔACC_1 pa možemo zaključiti da je tup. U njegovoj unutrašnjosti uzmimo polupravu p takvu da je $\measuredangle C_1Cp = 90°$. Označimo sa $\{R\} = p \cap B'B_1'$ (ovaj presjek postoji zato što postoji $\{S\} = p \cap B'C_1$ a p ne može sjeći duž C_1B_1' zato što $p \parallel p(A,B)$). Nije teško pokazati da je $CC_1 \cong RB_1'$.
Kako $B_1'-R-B'$ i $RB_1' \cong CC_1$ $\Rightarrow$ $CC_1 < B'B_1'$.

Posmatrajmo ΔABB_1 i $\Delta AB'B_1'$. Ti trouglovi imaju dva ugla jednaka (α i ugao od $90°$) pa imaju i treći ugao podudaran.
Sad imamo: $\left.\begin{array}{l}\measuredangle B_1AB \cong \measuredangle B'AB_1' = \alpha\\ AB \cong AB'\\ \measuredangle ABB_1 \cong \measuredangle AB'B_1' = \omega\end{array}\right\} \overset{USU}{\Rightarrow} \Delta ABB_1 \cong \Delta AB'B_1' \Downarrow BB_1 \cong B'B_1'$

(*) $\Rightarrow$ $CC_1 < BB_1$ q.e.d.

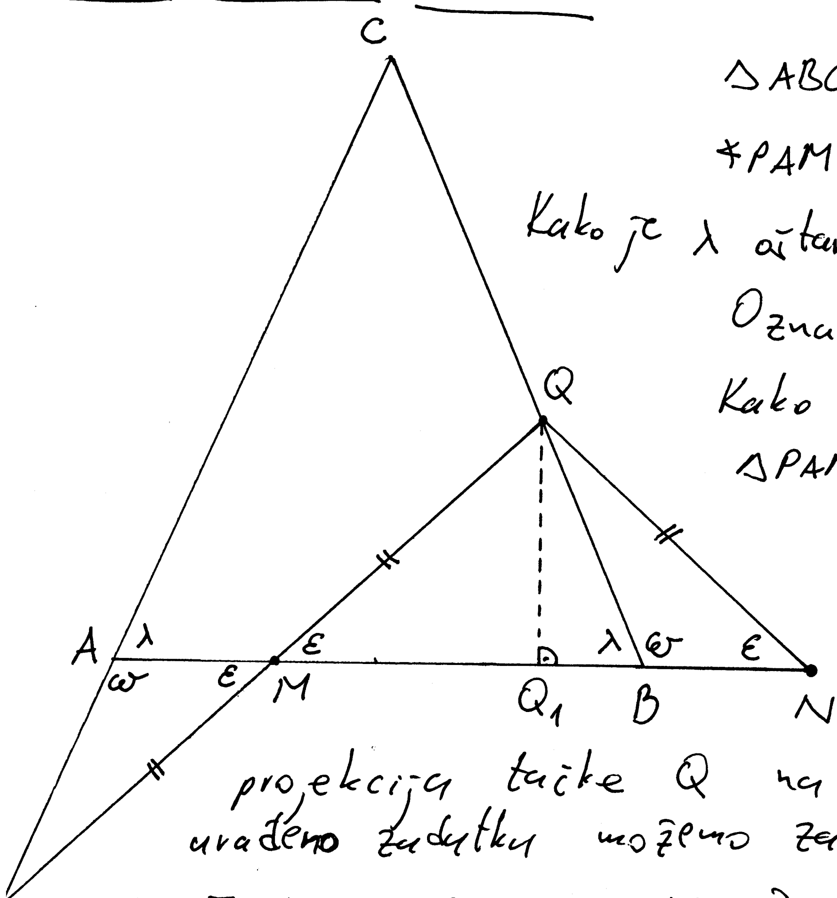
"$\Rightarrow$": $\left.\begin{array}{l}\Delta ABC\\ BB_1 \text{ i } CC_1 \text{ visine}\\ BB_1 > CC_1\end{array}\right\} \Rightarrow AC < AB$

Završiti sami.
Uputa: Koristiti "$\Leftarrow$".
[Pretpostavimo suprotno tvrdnji tj. ...]

(#) Kroz tačku M koja leži na osnovici AB jednakokrakog ΔABC prolazi prava koja siječe prave AC i BC u tačkama P i Q redom, tako da je M sredina duži PQ. Dokazati da je $AP \cong BQ$.

Rj: postavka zadatka

$$\left.\begin{array}{l} \Delta ABC \text{ jkk sa osnovicom } AB \\ M \in AB,\ P \in p(A,C),\ Q \in p(B,C) \\ \underline{P-M-Q \quad i \quad PM \cong MQ} \end{array}\right\} \Rightarrow AP \cong BQ$$



ΔABC jkk $\Rightarrow \measuredangle BAC \cong \measuredangle ABC = \lambda$

$\measuredangle PAM + \measuredangle BAC = \omega + \lambda = 180°$

Kako je λ oštar ugao $\Rightarrow \omega$ tup

Označimo sa $\varepsilon = \measuredangle PMA$

Kako je $\measuredangle BAC$ vanjski ugao $\Delta PAM \Rightarrow \lambda > \varepsilon$

$\Delta MBQ \Rightarrow \varepsilon < \lambda \Rightarrow$

$\Rightarrow MQ > BQ$.

Neka je Q_1 ortogonalna projekcija tačke Q na stranicu MB. Prema ranije urađeno zadatku možemo zaključiti da je $MQ_1 > Q_1B$

$\Rightarrow \exists N: M-B-N$ i $MQ \cong QN$.

$$\left.\begin{array}{l} MQ_1 \cong NQ_1, \\ \measuredangle MQ_1Q \cong \measuredangle NQ_1Q = \\ \quad = 90° \\ QQ_1 \cong QQ_1 \end{array}\right\} \xRightarrow{SUS} \Delta MQ_1Q \cong NQ_1Q$$

$$\Downarrow$$

$$MQ \cong NQ \quad i \quad \measuredangle Q_1MQ \cong \measuredangle Q_1NQ = \varepsilon$$

Sad imamo:

$$\left.\begin{array}{l} \measuredangle NBQ \cong \measuredangle MAP = \omega \\ \measuredangle BNQ \cong \measuredangle PMA = \varepsilon \\ PM \cong QN \end{array}\right\} \xRightarrow{UUS} \Delta BNQ \cong \Delta PAM$$

$$\Downarrow$$

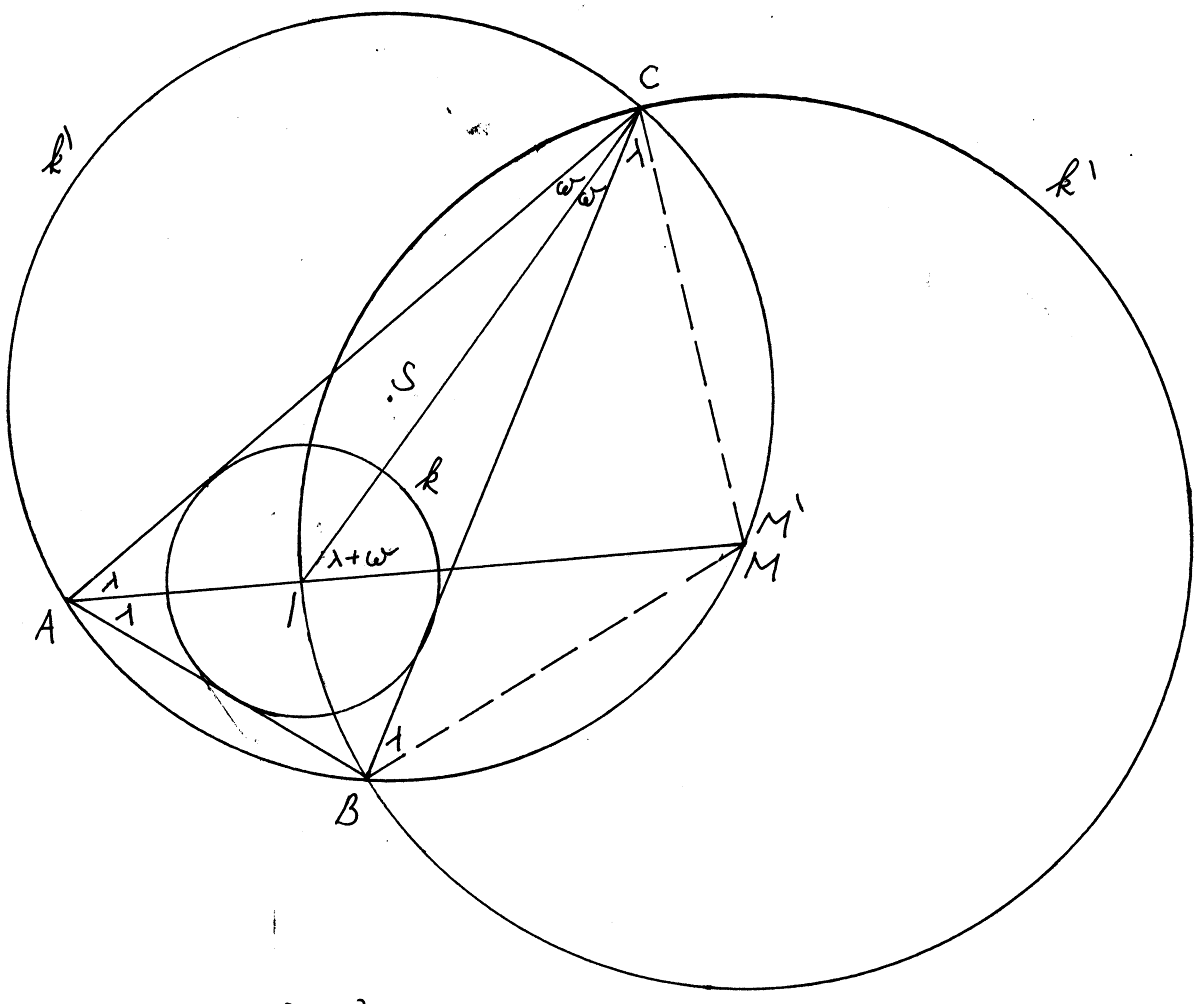
$$PM \cong QN$$

q.e.d.

(#) U ΔABC je upisana kružnica sa centrom u I. Dokazati da se centar opisane kružnice oko ΔBCI nalazi na presjeku $pp[A,I)$ i kružnice koja je opisana oko ΔABC.

Rj. postavka zadatka ΔABC,

$$\left.\begin{array}{l} k(I,r) \text{ upisana kružnica u } \Delta ABC \\ k'(S,r') \text{ kružnica opisana oko } \Delta ABC \\ k''(M,r'') \text{ kružnica opisana oko } \Delta BCI \end{array}\right\} \Rightarrow pp[A,I) \cap k' = \{M\}$$



Označimo sa $\{M'\} = pp[A,I) \cap k'$, pa dokažimo da je $M' \equiv M$.

Uvedimo oznake $\sphericalangle CAI \cong \sphericalangle BAI = \lambda$ i $\sphericalangle ACI \cong \sphericalangle BCI = \omega$.

$\square ABM'C$ je tetivni $\Rightarrow$ $\sphericalangle M'BC \cong \sphericalangle CAM' = \lambda$ i $\sphericalangle BCM' \cong \sphericalangle BAM' = \lambda$

$\Delta CBM'$ je jkk sa osnovicom u BC $\Rightarrow$ M' pripada simetrali stranice BC ...(*)

$\sphericalangle M'IC$ je vanjski ugao ΔAIC $\Rightarrow$ $\sphericalangle M'IC = \lambda + \omega$.

$\Delta M'CI$ je jkk sa osnovicom u IC $\Rightarrow$ M' pripada simetrali stranice IC ...(**)

Iz (*) i (**) $\Rightarrow$ M' je centar opisane kružnice ΔCIB $\Rightarrow$ $M \equiv M'$

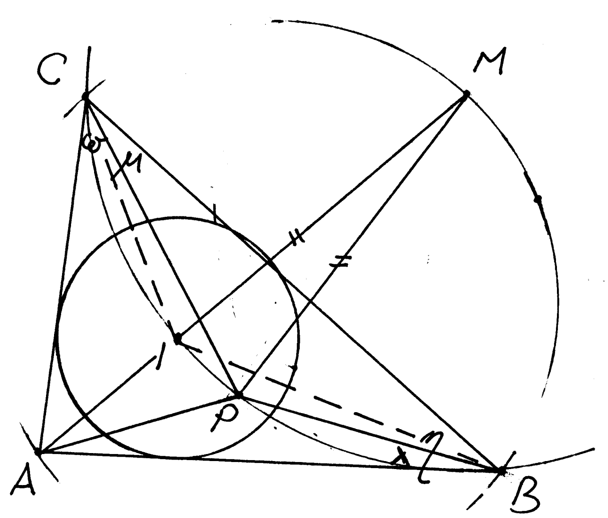
$\Rightarrow pp[A,I) \cap k' = \{M\}$ q.e.d.

(#) Neka je I centar upisane kružnice ΔABC. U unutrašnjosti ΔABC data je tačka P takva da je

$$\measuredangle PBA + \measuredangle PCA = \measuredangle PBC + \measuredangle PCB.$$

Dokazati da je $AP \geq AI$ te da jednakost vrijedi akko se tačka P podudara sa tačkom I.

Rj.



postavka zadatka

ΔABC

$k(I, r)$ kružnica upisana u ΔABC

P tačka u unutrašnjosti ΔABC takva

$\measuredangle PBA + \measuredangle PCA = \measuredangle PBC + \measuredangle PCB.$

$\Rightarrow \quad AP \geq AI$

Uvedimo oznake $\measuredangle PBA = \lambda$, $\measuredangle PCA = \omega$, $\measuredangle PBC = \eta$, $\measuredangle PCB = \mu$.

$\measuredangle ABC = \beta$, $\measuredangle ACB = \gamma$

Tada $\left.\begin{array}{l} \lambda + \omega = \mu + \eta \\ \lambda + \omega + \mu + \eta = \beta + \gamma \end{array}\right\} \Rightarrow \lambda + \omega = \mu + \eta = \dfrac{\beta+\gamma}{2}$

$\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ \quad /:2$

$\dfrac{\beta+\gamma}{2} = 90^\circ - \dfrac{\alpha}{2}$ pa $\mu + \eta = 90^\circ - \dfrac{\alpha}{2}$

$\measuredangle BPC = 180^\circ - (\mu + \eta) = 90^\circ + \dfrac{\alpha}{2} \quad \ldots (*)$

$\measuredangle BIC = 180^\circ - (\measuredangle IBC + \measuredangle ICB) = 180^\circ - \left(\dfrac{\beta}{2} + \dfrac{\gamma}{2}\right) = 90^\circ + \dfrac{\alpha}{2} \quad \ldots (**)$

$(*)$ i $(**)$ $\Rightarrow$ $\square IPBC$ je tetivni četverougao.

Prema prethodnom zadatku centar opisane kružnice ΔBCI se nalazi na presjeku $p[A, I)$ i kružnice opisane oko ΔABC.

Označimo tu tačku sa M. Imamo $IM \cong PM$.

Posmatramo ΔAMP. Imamo $AM < AP + PM$ tj. $AI + MI < AP + PM$

$\Rightarrow AI < AP$ q.e.d.

(Jednakost vrijedi samo u slučaju kada $P \equiv I$).